1091. 淡中氏相對定理ノ証明ニ就テ

吉田　耕作（名大）

以下ヲ標記ノ定理ノ証明ニ對スル方法的ナ注意ト受取ッテ頂キタイ。

$\boxed{\text{相對定理}}$ $\mathfrak{G}$ ヲ bicompact 群, $\mathfrak{U}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ連續, 既約, unitary ナ表現ノ互ニ同値デナイ一組ノ完全系トスル. $\mathfrak{R}$ ヲ以テ Fourier 多項式 $x(s)$:

$$x(s)=\sum \alpha_{ij}^{(\eta)}\, u_{ij}^{(\eta)}(s), \quad (u_{ij}^{(\eta)}(s))\in\mathfrak{U}, \quad s\in\mathfrak{G}$$

ノ全体トスル。$\mathfrak{R}$ ハ複素數体 $K$ ヲ係數トシ単位 $e$ ($e(s)\equiv 1$) ヲ有スル環ヲ作ル. $\mathfrak{T}$ ヲ以テ $\mathfrak{R}$ ノ $K$ ヘノ linear ナ準同型對應デ

$$(1). \quad \begin{cases} T\cdot e = 1 \\ T\cdot \bar{x} = (\overline{T\cdot x}) \end{cases} \quad (\text{bar ハ共軛複素數})$$

ヲ満足スルモノ $T$ ノ全体トスル。$\mathfrak{T}$ ガ空集合デナイコトハ各 $s\in\mathfrak{G}$ ガ

$$(2) \quad T_s\cdot x = x(s), \qquad x\in\mathfrak{R}$$

ニヨッテ一ツノ $T_s\in\mathfrak{T}$ ヲ定義スルコトカラ明カ。

<u>Lemma</u> $\mathfrak{T}$ ハ $\mathfrak{G}$ ヲ部分群トスル群ヲ作ル。

<u>証明</u> $T_1, T_2\in\mathfrak{T}$ ノ積 $T=T_1T_2$ ヲ次ノ如クニ定義スル。

$U(s)=(u_{ij}(s))\in\mathfrak{U}$ トスルトキ

$$(3) \quad T(u_{ij})=\sum_k T_1(u_{ik})\,T_2(u_{kj})$$

トオク. $u_{ij}(s)$ ノ一次独立性カラ, $T$ ヲ $\mathfrak{R}$ 全体ニ linear ニ拡張デキル. 拡張シタモノヲ同ジク $T$ デ表ハスト $T$ ハ $\mathfrak{T}$ ニ属スルコトハ明カ. 又 $s_0$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ単位

元トスルト $\mathfrak{T}$ ハ $T_{s_0}$ ヲ単位元トスル群ニナルコトモ容易ニワカル。$\mathfrak{g}$ ガ對應。

$$s \longleftrightarrow T_s$$

ニヨッテ $\mathfrak{T}$ ニ isomorphic ニ入ルコトハ、$\mathcal{R}$ ノ完全性カラ

(4) $s \neq t$ ナラ $\quad T_s \neq T_t$

ヲ得ルコトカラワカル。

—— 以上 ——

次ニ $\mathfrak{T}$ ニ弱 topology ヲ入レル。即チ $T_{s_0}$ ノ近傍ヲ

$$\underset{T}{E}\{|T \cdot x_i - T_{s_0} \cdot x_i| < \varepsilon;\ x_i \in \mathcal{R};\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n\}$$

デ定義スルト $\mathfrak{T}$ ハ無限次元ノ torus ノ閉部分集合ニナルカラ bicompact。對應 $s \longleftrightarrow T_s$ ガ topological ナコトモ容易ニワカルカラ $\mathfrak{g}$ ハ $\mathfrak{T}$ ノ開部分群ニナル訳デアルガ実ハ

<u>定理.</u> （淡中氏相對定理）ガ成リ立ツ。即チ

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{g}.$$

証明. 先ヅ弱 topology ニヨリ各 $x(s) \in \mathcal{R}$ ハ $\mathfrak{T}$ ノ上ノ連続函数 $x(T)$ ト考ヘテヨイ。

$$x(T_s) = x(s)$$

$x(T)$ ノ全体 $\mathcal{R}(\mathfrak{T})$ ハ $\mathfrak{T}$ デノ連続函数全体ノ中デ norm $\|y\| = \sup|y(T)|$ ノ意味デ dense ニナル。何者、$\mathcal{R}(\mathfrak{T})$ ハ次ノ二條件ヲ満足スルカラ

i) $1-e(T)\in\mathcal{R}(\mathfrak{J})$

ii) 任意ノ $x(T)\in\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ ニ對シ共軛複素函數 $\overline{x}(T)\in\mathcal{R}(\mathfrak{J})$

iii) $T_1\neq T_2$ ナラバ $x(T_1)\neq x(T_2)$ ナル如キ $x(T)\in\mathcal{R}(\mathfrak{J})$

假ニ $\mathfrak{J}-\mathfrak{G}\ni T_0$ ナル如キ $T_0$ ガ存在シタトシテ矛盾ヲ出ス。コノトキハ

(5) $\mathfrak{J}$ デ $y(T)\geqq 0$, $\mathfrak{G}$ デ $y(s)=0$, $y(T_0)=1$

ナル如キ連續函數 $y(T)$ ヲトルト任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ上カラ $x(s)=\sum\alpha_{ij}^{(\eta)}u_{ij}^{(\eta)}(s)\in\mathcal{R}$ ガ存在シテ

$$\left|y(T)-\sum\alpha_{ij}^{(\eta)}u_{ij}^{(\eta)}(T)\right|<\varepsilon\quad\text{on }\mathfrak{J},$$

從ツテ特ニ

$$\left|y(s)-\sum\alpha_{ij}^{(\eta)}u_{ij}^{(\eta)}(s)\right|<\varepsilon$$

トデキル。$u_{11}^{(0)}(s)=e(s)\equiv 1$ トスレバ $u_{11}^{(0)}(T)\equiv 1$, 從ツテ mean ヲトリ

$$\left|\underset{T}{\mathrm{M}}\,(y(T))-\alpha_{11}^{(0)}\right|<\varepsilon,\quad\left|\underset{s}{\mathrm{M}}\,(y(s))-\alpha_{11}^{(0)}\right|<\varepsilon$$

之ハ $\underset{s}{\mathrm{M}}\,(y(s))=0$, $\underset{T}{\mathrm{M}}(y(T))>0$ ニ矛盾スル。

——以上——

尚コノ定理ノ證明ニ於テ Peter-Weyl ノ理論ハ次ノ形デシカ使ツテヰナイ。第一ニ $s\neq s_0$ ナラバ

$\mathfrak{U}(s) \neq \mathfrak{U}(s_0)$ ナル如キ表現 $\mathfrak{U}(s) \in \mathfrak{U}$ ノ存在。第二ニ $\mathfrak{R}$ ガ環ヲナスコト ——— 之レニハ全テノ連續表現ガ unitary 表現ト equivalent ナコト從ッテ unitary, irreducible ナ表現ニ完全ニ分解スルコトヲ使ッテルダケデアル。第三ニ invariant mean ノ存在

淡中氏ヤ M. Krein, S. Bochner 等ノ證明デハ今少シ複雑(?)ナ形デ P. W ノ理論ガ使ハレテヰルヤウニ思フ。

兎ニ角、角谷君ノ所謂 principle of duality ノ一應用トシテコノ定理ヲ得タト思ッテ頂キタイ。